

1 Resolva as equações:

a) $2^{x-2} - \frac{1}{4^{3x-1}} = 0$ ($\frac{4}{7}$) b) $2^{2x} - 12 \times 2^x + 32 = 0$ (2,3)

c) $9^x + 81 = 6 \times 3^{x+1}$ (2) d) $3^{x+3} - 3^{3-x} = 728$ (3)

e) $1+2+4+8+\dots+2^x = 4095$ (11) f) $2^x + 4 \times 2^{-3x} = 5 \times 2^{-x}$ (0, 1)

g) $9^x = \sqrt{3^{x+1}}$ h) $\sqrt[3]{4^{x+1}} = \sqrt{2^x}$

i) $2^{x+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ j) $8^{\frac{x}{2}} = 4^{-x+1}$

k) $2^{x^2-x} = 64$ l) $4^x - 3 \times 2^x = 4$

m) $0,0002 = \frac{2}{10^{2x-1}}$ n) $3^x + 45 \times 3^{-x} = 14$

o) $e^x - e^{-x} = 4$ p) $3^{-x+1} - 9^x = 0$

2 Determine o domínio das funções reais de variável real definidas por

a) $x \rightarrow f(x) = \ln(2+x-x^2)$ ($]-1,2[$)

b) $x \rightarrow g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ ($]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$)

c) $x \rightarrow h(x) = \frac{\ln(7x-2x^2-5)}{1-e^{2-x}}$ ($]1, \frac{5}{2}[\setminus \{2\}$)

d) $x \rightarrow i(x) = \log_a\left(\frac{38x-9-8x^2}{x^2-8x+25}\right)$ ($]1, \frac{9}{4} \setminus \{2\}$)

3 Simplifique

a) $e^{\ln(a+b)}$ (a+b) b) $2^{4-\log_2 x}$ ($\frac{16}{x}$)

c) $e^{x \ln x}$ (x^x) d) $\ln(e^{2+x})^x - \ln e^{x^2}$ (2x)

e) $e^{\ln x - 3 \ln y}$ ($\frac{x}{y^3}$)

4 Sendo $x, y \in \mathbb{Z}$, calcule o valor de $\log_{\frac{1}{x}} x + \log_y \left(\frac{1}{y}\right)$ (-2)

5. Resolva as equações:

a) $4e^t - 1 = 0$ (-2ln2) b) $4e^{-x} + e^x = 5$ (0,2ln2)

c) $3^x + 3^{x+2} = 39$ ($\log_3 3,9$) d) $e^{6t+2} + e^{3t+1} - 2 = 0$ ($-\frac{1}{3}$)

e) $9(e^{0,06x} + e^{-0,06x}) = 36$ (-21,95;21,95 (2c.d.)) f) $4t^3 e^{-t} = 2t^3 e^{-0,7t}$ (ln2/0,3)

g) $2^x = 3 \times 5^x$ (ln3/ln0,4) h) $e^{2 \ln x} + e^{-\ln x} = \ln(e^{\frac{2}{x}})$

i) $e^{-x} \cdot \ln(x^2) = \ln x$ j) $(e^x - e^{-x}) \cdot \ln(x) = \ln(x^2)$

k) $2^{x-1} = e^x$

6 Resolva as equações

a) $5 \log_{10} x - \log_{10} 32 = \log_{10} \left(\frac{x}{2} \right)$ (2) b) $\ln(4x^2) = 0$ $\left(\pm \frac{1}{2} \right)$

c) $(\ln x)^2 + 4 \ln x + 4 = 0$ (e^{-2}) d) $\ln x^2 = 2 \ln 4$ $(-4, 4)$

e) $\log_2(2t) + \log_2 \left(\frac{t+2}{2} \right) = 3$ (2) f) $2 \ln(3x-4) + \ln(10x-4) = 2 \ln(5x-2)$ (2)

g) $2 \log_2(x-8) = \log_2(3x-4) - 1$ (12) h) $\log_2 \left(\frac{x+2}{x-1} \right) + \log_2((x+2)(x-1)) = 2$ (-4)

i) $(\ln x)^2 + 3 \ln x = 4$ (e, e^{-4}) j) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{125} x = \frac{5}{2}$ (125)

k) $\log_{10} x - \log_x 100 + 1 = 0$ $(10, 1/100)$ l) $\log_3(2x-3) + 2 \log_9(x-1) = 0$ (2)

m) $\log_2(3x+1) = \log_2(x-1) + 2$ n) $2 \ln x = \ln(2x-1)$

o) $\log_2(4x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(3x-2) = 1$ p) $2 \ln x - \ln(x^2 + x - 2) = 0$

q) $\log(x-1)^2 = 2 \log 3$ r) $\log(x+1)^2 + \log(x+9)^2 = 2 \log 9$

s) $\log[(x+3)(x-8)] + \log\left(\frac{x+3}{x-8}\right) = 2$

7 Determine os valores de x que verificam cada uma das seguintes condições:

a) $2 \ln(x-1) - \ln(x+1) \leq 0$ $([1, 3])$ b) $xe^{x+1} - x < 0$ $(]-1, 0[)$

c) $\log_{10}(1-x^2) < 1$ $(]-1, 1[)$ d) $\ln(x^2+1) > \ln(x+2) - \ln 2$ $(]-2, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[)$

e) $\ln(x+1) \leq \ln(x^2-4)$ $\left(\left[\frac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty \right[\right)$ f) $2e^{4x} + e^{2x} \leq 10$ $([-\infty, \frac{1}{2} \ln 2])$

g) $\left(\frac{1}{4} \right)^x > \left(\frac{1}{3} \right)^x$ (\mathbb{R}^-) h) $\left(\frac{1}{3} \right)^x > \left(\frac{1}{2} \right)^x$ (\mathbb{R}^-)

i) $\log_2(x+1) - \log_2(4x+1) \geq 0$ j) $\log_3(x-2) > 1 + \log_3(x+3)$

k) $\log_2 x - \log_4(x-1) \geq 1$ l) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 \leq 0$

m) $\frac{e^x - 2}{\ln x - 1} \leq 0$ n) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} > 117$

o) $2 \ln(3-x) < \ln(x+1) + \ln(x-2)$ p) $\left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{4} \right)^{x+2}$

q) $\log_3(x^2) - \log_3(5x) = 2$ r) $e^{x+2} \cdot \ln x - 2 \cdot e^{x+2} > 0$

8 Determine o domínio e os zeros de cada uma das seguintes funções reais de variável real

a) $f(x) = \log(x^2 - 1)$ $(]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[; -\sqrt{2}, \sqrt{2})$

b) $g(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$ $([2, +\infty[; 2)$

c) $h(x) = |\ln(x-1)| - 2$ $(]1, +\infty[; 1+e^{-2}, 1+e^2)$

d) $i(x) = \ln(-3e^{2x} + 2e^x + 1)$ $(]-\infty, 0[; \ln(2/3))$

e) $j(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ $(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, 0)$

f) $k(x) = \ln \frac{e^x - 2}{1 - 3e^x}$ $(]-\ln 3, \ln 2[, \ln(3/4))$

9. Caracterize a função inversa de cada uma das seguintes funções.

a) $f(x) = 2 - 2e^{3x}$ $(f^{-1}:]-\infty, 2[\rightarrow \mathbb{R} \text{ com } f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right))$

b) $g(x) = 2 - \ln(x+2)$ $(f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } f^{-1}(x) = -2 + e^{2-x})$

c) $h(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2$ $(f^{-1}:]2, 3[\cup]3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ com } f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln(x-2)})$

d) $i(t) = \frac{1 - e^{t+1}}{2e^t - 1}$ $(i^{-1}:]-\infty, -\frac{e}{2}[\cup]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \text{ com } i^{-1}(t) = \ln \left(\frac{t+1}{2t+e} \right))$

e) $j(x) = 1 + \frac{1}{2} \ln(4x+1)$ $(j^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ com } j^{-1}(x) = \frac{e^{2x-2}-1}{4})$

* Calcule, sem recorrer à calculadora:

a) $\log_5 \sqrt{5} + \log_4 0,25$

b) $\frac{\log_2 \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$

c) $3^{2-2\log_3 7}$

d) $\ln(2e) + 3\ln(e^2) + \ln(0,5)$

* Exprima, em função de $\ln 2$ os números reais:

$x = \ln \sqrt{8}$; $y = \frac{1}{2} \ln 16$; $z = \ln \frac{1}{2}$; $t = \ln 36 - 2 \ln 3$

* Sendo $\log_a b = k$, determine, em função de k , o valor de $\log_a \left(\frac{a^3}{b} \right)$.

* Considere a função real de variável real assim definida: $f(x) = \frac{1}{4} - 2e^{1-3x}$

Mostre que $\ln(2\sqrt[3]{e})$ é o único zero da função.

* Seja a função $g(x) = \ln(4e^{2x} - 1)$.

Mostre que $D_g =]-\ln 2, +\infty[$.

* Sabe-se que $\log_a k = 2,25$.

Calcule:

a) $\log_a(ak)$ b) $\log_a\left(\frac{a^2}{\sqrt{k}}\right)$ c) $a^{2\log_a 3} - \log_a\left(\frac{k}{a}\right)$

* Represente na forma $\log_2 a$ cada uma das seguintes expressões:

a) $3 + \log_2 3$ b) $\log_4(15) - \log_2(3)$ c) $\frac{2 - \log_2(5)}{3}$

* Sabendo que $\log_a b = -2$, indique o valor de:

a) $\log_a(b^3)$ b) $\log_a(ab^2)$
 c) $\log_{a^2} b$ d) $\log_{\frac{1}{a}} b$

Se $\log_3 10 = a$ e $\log_3 7 = b$, então $\log_3 700$ é igual a

(A) $10b + a$ (B) $2ab$ (C) $b + a^2$ (D) $2a + b$

2- Sejam a , b e c números reais tais que $\log_a b = \log_a c + 5$, então $\log_a\left(\frac{c}{b}\right)$ é igual a:

(A) 5 (B) $\frac{1}{3}$ (C) -5 (D) $0,5$

Na figura está parte da representação gráfica da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \log_8 x$.

P é um ponto do gráfico de f , que tem ordenada $\frac{1}{3}$

FIG.1

Qual é a abcissa do ponto P ?

(A) $\frac{8}{3}$ (B) 1 (C) $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$ (D) 2

8- Indique o valor de p para o qual se verifica a igualdade $\log_p 16 = 4$

(A) -4 (B) 4 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

9- Seja f uma função real de variável real definida por: $f(x) = b^{5+\log_b 2}$, $b > 1$
 afirmar-se que:

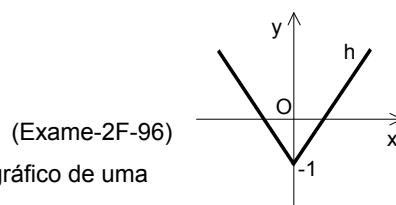
(A) $f(x) = 2b^5$ (B) $f(x) = 5 + \log_b 2$
 (C) $f(x) = \log_b 2^5$ (D) $f(x) = \log_b 10$

4- Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo a , igual a $e^{2\ln a}$?

- (A) $2 + a$ (B) $2a$ (C) a^2 (D) 2^a

10. Seja $h(x) = \pi^{-x}$. Então $\lim_{n \rightarrow +\infty} [h(1) + h(2) + h(3) + \dots + h(n)]$ é igual

- (A) $\frac{1}{\pi - 1}$ (B) $\frac{1}{1 + \pi}$ (C) $+\infty$ (D) 0



11. A figura representa parte de duas semi-rectas que são o gráfico de uma função h , de domínio \mathbb{R} , que tem Oy como eixo de simetria.

O contradomínio da função $x \rightarrow 2^{h(x)}$ é:

- (A) $[-1, +\infty[$ (B) $[-2, +\infty[$
 (C) $]0, +\infty[$ (D) $[\frac{1}{2}, +\infty[$

(Exame-E Especial-96)

12. Considere a função f definida por $f(x) = \ln(3x)$

Indique qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função f :

- (A) $(e, e + \ln 3)$ (B) $(e, e \ln 3)$ (C) $(e, \ln 3)$ (D) $(e, 1 + \ln 3)$ (P Modelo-98)

Considere a função f definida por $f(x) = e^{x+3}$.

Indique qual dos seguintes pontos

pertence ao gráfico da função f :

- (A) $A(-3, 0)$ (B) $B(\ln 2, 2e^3)$ (C) $C(-1, \ln 2)$ (D) $D(\ln 5, 8)$

Considere a função f definida por $f(x) = \ln(4x^2 + e^2)$. Indique qual dos seguintes pontos pertencem ao gráfico de f .

- (A) $(e, 7)$ (B) $(e, 10 \ln e)$ (C) $(e, 10)$ (D) $(e, 2 + \ln 5)$

Na figura estão representadas graficamente duas funções f e g , definidas em \mathbb{R}^+ por:

$$f(x) = \log_2(x) \text{ e } g(x) = -5 + \log_2(x^2)$$

FIG 2

Os gráficos de f e de g intersectam-se no ponto I

As coordenadas de I são:

- (A) (8,32) (B) (32,5) (C) (32,8) (D) (5,32)

13. No início do ano de 1990 ($t = 0$) existiam 6 mil aves de determinada espécie. O número de aves dessa espécie, em milhares, decresceu com o tempo de acordo com a fórmula

$A(t) = \log_2(a - 7t)$ sendo t o número de anos decorridos desde aquela data.

- a) Verifique que $a = 64$.
 b) Quantas aves desapareceram durante o ano de 1997? (≈ 900)
 c) Em que ano a espécie foi extinta? (1999)

14. O número A de árvores de um bosque cresceu de acordo com a fórmula $A(t) = 100 \times 1,8^{kt}$ sendo t o número de anos decorridos desde a primeira contagem.

- a) Decorridos 10 anos após a primeira contagem, verificou-se que, no bosque, existiam 180 árvores. Verifique que $k = 0,1$.

- b) Verifique que, para qualquer valor de t , $\frac{A(t+12)}{A(t)}$ é constante.

Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às unidades) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita. (2)

- c) Determine a taxa de variação média de A nos intervalos $[0, 2]$ e $[8, 10]$. Interprete os valores obtidos. (6;10)

- d) Exprima t em função de A e conclua que $t = \frac{\ln A - \ln 100}{0,1 \cdot \ln 1,8}$

15. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em quilómetros) por

$$P(h) = 101 \cdot e^{-0,12h}$$

- a) A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico, Açores. A altitude do Pico é de 2350 metros.

Qual é o valor da pressão atmosférica nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades. (76 kPa)

- b) Determine x tal que, para qualquer h $P(h+x) = \frac{1}{2} P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas. (5,8)

Interprete o valor obtido no contexto do problema. (Exame-2F-2000)

16. Seja $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \log_2(2 \cdot \sqrt[3]{x})$

Indique qual das expressões seguintes também pode definir g .

- (A) $2 + \log_2(\sqrt[3]{x})$ (B) $2 \log_2(\sqrt[3]{x})$ (C) $\frac{3 + \log_2 x}{3}$ (D) $\frac{1 + \log_2 x}{2}$ (P Modelo-99)

17. Seja f a função definida em \mathbb{R}^+ por $f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2 x$

a) Mostre que $f(x) = 3 + \log_2 x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

b) Determine a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com a recta de equação

$$y = 8$$

$$(x=32)$$

(Exame-1F-1C-98)

18. A magnitude M de um sismo e a energia total E libertada por esse sismo estão relacionadas pela equação : $\log_{10} E = 5,24 + 1,44M$ (a energia E é medida em joule)

a) Um físico português estimou que o terramoto de Lisboa de 1755 teve magnitude 8,6. Mostre que a energia libertada nesse sismo foi aproximadamente $4,2 \times 10^{17}$ joule.

b) A ponte Vasco da Gama foi concebida para resistir a um sismo cuja energia total libertada seja cinco vezes ao do terramoto de Lisboa de 1755. Qual será a magnitude de um tal sismo. (Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas). (9,1)

(Exame-2F-98)

19. Uma instituição bancária oferece uma taxa de juro de 8% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade.

Um cliente desse banco fez um depósito de 100 contos, nessa modalidade.

Qual é, em contos, o capital desse cliente, relativo a esse depósito, passados n anos.

- (A) $100 + 0,8n$ (B) $100 \times 1,08n$ (C) $100 \times 1,8^n$ (D) $100 \times 1,08^n$

(Exame-1F-2C-98)

20. A figura representa um reservatório com três metros de altura.

Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água

e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. O reservatório fica vazio ao fim de catorze horas.

Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por

$$h(t) = \log_2(a - bt), \quad t \in [0, 14] \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são constantes reais positivas.}$$

a) Mostre que $a = 8$ e que $b = \frac{1}{2}$

b) Prove que a taxa de variação média de h no intervalo $[6, 11]$ é $-0,2$.

Interprete este valor no contexto da situação descrita.

(Exame-1F-1C-99)

21.----- Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do peso p (em quilogramas), por

$$A(p) = -0,52 + 0,55 \ln(p)$$

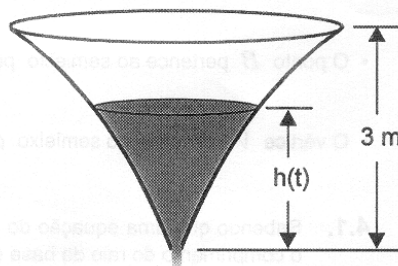
Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as alíneas seguintes.

a) O Ricardo tem 1,4 m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?

Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.

(33 Kg)

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.



- b) Verifique que, para qualquer valor de p , a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante

Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita. (0,38)

(Exame-1F-2C-2001)

22 As substâncias radioactivas desintegram-se, com o decorrer do tempo, de acordo com a lei $M = A \cdot e^{-kt}$, sendo A a quantidade in

Uma amostra de 10 mg de rádio (isótopo ^{226}Ra) desintegra-se segundo a lei

$$M(t) = 10 \cdot e^{-kt}$$

sendo t o tempo expresso em **milhares de anos**

- a) Sabendo que decorridos 400 anos a massa da amostra se reduz a 8,43 mg verifique que, com três casas decimais, se tem $k = 0,427$.
- b) Chama-se **período de semi-desintegração** ao tempo necessário para que uma substância radioactiva se reduza a metade.

Determine, em anos, o período de semi-desintegração do rádio.

(1623 anos)

23. A intensidade I , em decibéis, de um som audível, pode ser dado por

$$I = 170 + 10 \log_{10} P$$

onde P é o valor da potência, em certa unidade, do som emitido.

- a) Sabe-se que um som com intensidade superior ou igual a 100 decibéis é prejudicial à saúde. Conclua daí, a partir de que potência é que devem ser usados meios de protecção auditiva.

(10^{-7})

- b) Dois sons de potências P e P_1 são emitidos por uma mesma fonte. Sabendo que a

intensidade do primeiro é dupla da do segundo mostre que $\frac{P}{(P_1)^2} = 10^{17}$

- c) Justifique que quando a potência cresce em progressão geométrica de razão 10^3 a intensidade cresce em progressão aritmética de razão 30. (PA-EE-95)

24. Um petroleiro, que navegava no oceano Atlântico, encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Em consequência disso, começou a derramar crude. Admita que, às t horas do dia a seguir ao do acidente, a área, em km^2 , de crude espalhado sobre o oceano é dada por

$$A(t) = 16 \cdot e^{0.1t}$$

- a) Verifique que, para qualquer valor de t , $\frac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante.

Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às décimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita. (1,1)

- b) Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou. Sabendo que esse local se encontra a sete quilómetros da costa, determine a que horas, do dia a seguir ao acidente, a mancha de crude atingirá a costa.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais

(22h 38min)

(Exame-2F-2001)

- 25 O valor de $5^{2+\log_5(w+1)}$ é igual a

- (A) $5^2 + w + 1$ (B) $25w + 25$ (C) $25 \log_5(w + 1)$ (D) $25 + \log_5(w + 1)$ (Exame-1F-93)

26. A massa, em gramas, ocupada por uma reprodução de fungos é dada, em função do tempo t em dias, por

$$m(t) = \frac{3}{0,75 + 1,25 \cdot e^{-t}}$$

- a) Determine a massa inicial (1,5 gr)
 b) Quanto é a massa ao fim de 10 dias (4,00 gr (2 c.d.))
 c) Determine a taxa de variação média de m nos intervalos $[1, 2]$ e $[4, 5]$. Interprete os valores obtidos. (0,78 e 0.07 gr/dia)
 d) Esboce o gráfico de m para o intervalo $[0, 10]$
 e) Exprima t em função de m ($t = \ln\left(\frac{1,25m}{3 - 0,75m}\right)$)
27. Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi dada pela fórmula $P = e^{0,4t - 0,01t^2}$ onde P representa a percentagem de pessoas doentes e t o tempo em dias.
- a) Qual a percentagem de pessoas doentes quando se iniciou o estudo da epidemia? (1%)
 b) Quando foi o pior momento da epidemia? Qual era a percentagem de doentes? (recorra à calculadora gráfica) (20º dia, 54,5%)
 c) A epidemia considera-se erradicada quando a percentagem de doentes for inferior a 1 %. Quando aconteceu isso? (40º dia)
 d) No 15º dia, qual é a probabilidade do presidente da câmara estar doente? (42,5%) (Funções 12-ME-DES)

28. Prove que

“Se os valores de uma variável x crescerem em progressão geométrica de razão $r > 0$, com o primeiro termo $u_1 > 0$, os logaritmos de x , em qualquer base, crescerão em progressão aritmética.”

29. Seja k uma constante real. Para cada valor de k , a equação em x , $\ln x = k^2$:

- (A) Admite uma única solução (B) Admite duas soluções distintas
 (C) Não tem soluções se $k \leq 0$ (D) Pode não ter solução

30. Sejam a , b e c três números reais tais que $\log_a(b) = c$.

Qual é o valor de $\log_a(ab)$?

- (A) $1 + c$ (B) $a + c$ (C) $a c$ (D) $a + bc$

(P Modelo-2000)

31. A expressão $M = \frac{2}{3}(\log_{10} E - 11,8)$ relaciona a quantidade aproximada de energia E em ergs

(1 erg = 10^{-17} joule) libertada por um sismo de magnitude M , na escala de Richter.

- a) Verifique que $E = 10^{11,8 + 1,5M}$.
 b) Qual a energia libertada pelo sismo de Lisboa de 1755 sabendo que este teve uma magnitude de 8,7 na escala de Richter. ($\approx 7,08 \times 10^{24}$)
 c) Verifique que um sismo em que a energia libertada é 10 vezes superior à de outro tem um acréscimo de magnitude de apenas 0,67 (2 c.d.) na escala de Richter.
 e) Verifique que a uma diferença de magnitude de mais uma unidade na escala de Richter corresponde uma energia libertada cerca de 32 vezes maior.

32. Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos.

Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respectivamente, por $A(t) = 4t^3 e^{-t}$ e $C(t) = 2t^3 e^{-0,7t}$

A variável t designa o tempo, medido em **horas**, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ($t \in [0, 12]$)

32.1. Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

32.1.1. Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Ana, quinze **minutos** depois de ela o ter tornado. Apresente o resultado, em miligramas por litro de sangue, arredondado às centésimas. (0,05)

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

32.1.2. No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades). (2h 19min)

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais

32.2. Considere as seguintes questões:

1. Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?
2. Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Ana ou o Carlos? E quanto tempo antes do outro?

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões.

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicita as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas)

33. O nível N de um som, medido em decibéis, é função da sua **intensidade** I , medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade

$$N = 10 \log_{10} \left(10^{12} I \right) \text{ para } I > 0$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes

33.1 Verifique que $N = 120 + 10 \log_{10} I$

33.2 Admita que o nível de ruído de um avião a jacto, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis.

Determine a intensidade desse som, em watt por metro quadrado. (100)

34. A magnitude aparente (m) e a magnitude absoluta (M) de uma estrela são grandezas utilizadas em Astronomia para calcular a distância (d) a que essa estrela se encontra da Terra.

As três variáveis estão relacionadas pela fórmula

$$10^{0,4(m-M)} = \frac{d^2}{100} \quad (d \text{ é medida em parsec, unidade utilizada em Astronomia para grandes distâncias.})$$

34.1 A Estrela Polar tem magnitude aparente $m = 2$, sendo a sua magnitude absoluta $M = -4,6$. Qual é a distância da Terra à Estrela Polar? (Apresente o resultado em parsec, arredondado às unidades.)

(209 parsec)

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

34.2 Prove que, para quaisquer m , M e d , se tem:

$$m = M - 5(1 - \log_{10} d)$$

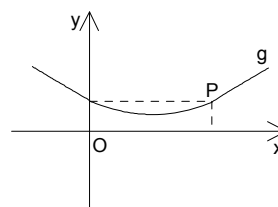
Exame-EE-Set 2001

35 Na figura está parte da representação gráfica da função g definida por $g(x) = \log_2(x^2 - 4x + 8)$.

P é um ponto do gráfico cuja ordenada é igual a $g(0)$.

Qual é a abcissa do ponto P ?

- (A) 8 (B) 2 (C) 4 (D) 3



36 Sejam x e y números reais positivos tais que $\log_2 x = p$ e $\log_2 y = q$. O valor de $\left(\frac{x}{y}\right)$ é:

- (A) 2^{p-q} (B) $2^p - 2^q$ (C) $\log_2\left(\frac{p}{q}\right)$ (D) $2^{\frac{p}{q}}$

37. Cada ser vivo tem uma quantidade constante de carbono 14. Após a sua morte a quantidade de carbono 14 existente nos animais e plantas vai diminuindo com o tempo.

A quantidade de Q carbono 14 que resta num fóssil t milhares de anos após a morte do ser vivo é dada por

$$Q(t) = ce^{-0,121t} \quad (c \text{ é a quantidade de carbono 14 existente na data da morte})$$

- a) Foram encontrados os restos de um esqueleto de um animal. Dado que a descoberta suscitou interesse arqueológico, foram efectuados testes laboratoriais os quais revelaram que se haviam perdido 58% do carbono 14 existente quando vivo. Há quantos anos morreu o animal?

(7169 anos aprox.)

- b) Em percentagem, qual é a redução de carbono 14 em cada 1000 anos decorridos após a morte do ser vivo? (Apresente o resultado com aproximação às décimas) (11,4%)

38. Seja g uma função, de domínio A , definida por $g(x) = \ln(1 - x^2)$.

Qual dos seguintes pode ser o conjunto A ?

- (A) $]-e+1, e-1[$ (B) $] -1, 1[$
(C) $] 0, +\infty[$ (D) $] -\infty, 1[$

39. Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por

$$p(t) = 3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036 t}}$$

(considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao **início** do ano de 1864)

39.1) De acordo com este modelo, qual será a população de Portugal Continental no final do ano de 2003? (9,8)

Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

39.2) Sem recorrer à calculadora (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:

De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes? (1837)

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

40. Um pára-quedista salta de um helicóptero. Ao fim de algum tempo, o pára-quedas abre. Admita que a distância (em metros) a que o pára-quedista se encontra do solo, t segundos **após a abertura do pára-quedas**, é dada por

$$d(t) = 840 - 6t + 25 e^{-1,7 t}$$

40.1) Sabendo que, no momento em que o pára-quedista salta do helicóptero, este se encontra a 1500 metros do solo, determine a distância percorrida em queda livre pelo pára-quedista (desde que salta do helicóptero até ao momento de abertura do pára-quedas).

(635 metros)

40.2) Utilize a calculadora para determinar, com aproximação ao segundo, quanto tempo, após a abertura do pára-quedas, demora o pára-quedas a atingir o solo. Explique como procedeu.

(140 s)

41. Considere a equação $3y = \log_2 x$ ($x > 0$)

Qual das seguintes condições é equivalente a esta equação?

(A) $x = 8^y$ (B) $x = 3y^2$ (C) $y = 9^x$ (D) $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

42. Uma pastilha elástica é tanto mais saborosa quanto maior for a quantidade de aromatizante nela presente.

Admita que a quantidade de aromatizante presente numa pastilha elástica da marca *Mastibom*,

t minutos após ter sido colocada na boca, é dada, em certa unidade de medida, por

$$A(t) = 5 e^{-0,1t}, \quad t \in [0, +\infty[$$

a) Utilizando métodos analíticos e recorrendo à calculadora para efectuar cálculos numéricos, determina ao fim de quanto tempo, após ter sido colocada na boca, a quantidade de aromatizante presente numa pastilha *Mastibom* se reduz a metade. Apresente o resultado em minutos, arredondado às unidades. (7 min)

b) Suponha que é responsável pelo laboratório da empresa produtora das pastilhas *Mastibom*. Admita que a concorrência acabou de lançar no mercado três tipos de pastilhas e que a gerência da sua empresa o encarregou de analisar essas pastilhas, para ver se algumas delas poderiam colocar em risco a posição de líder do mercado das pastilhas *Mastibom*.

Da análise que efectuou, concluiu que a quantidade de aromatizante presente em cada uma delas, t minutos após ter sido colocada na boca, é dada por:

Pastilha X: $B_1(t) = 4e^{-0,15t}$, $t \in [0, +\infty[$

Pastilha Y: $B_2(t) = 7e^{-0,2t}$, $t \in [0, +\infty[$

Pastilha Z: $B_3(t) = 6e^{-0,1t}$, $t \in [0, +\infty[$

Recorrendo à sua calculadora, compare, **no intervalo $[0, 15]$** cada uma destas três funções com a função A , definida acima (admita que, ao fim de quinze minutos, a quantidade de aromatizante presente em cada uma das pastilhas já não lhes dá sabor).

Elabore um relatório, com cerca de dez linhas, que possa ser apresentado à gerência da sua empresa, em que mencione, para cada uma das pastilhas concorrentes, durante quanto tempo é que, nos primeiros quinze minutos, ela é mais saborosa que a *Mastibom* (Sempre? Nunca? A partir de certo instante? Qual? Até um determinado instante? Qual?).

Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

43- Um agricultor considera que o valor actual das suas máquinas agrícolas é 10 000 contos e que em cada ano sofrem uma desvalorização de 10% em relação ao ano anterior.

Define uma função que exprima o valor das máquinas em função do tempo (em anos)

Determina, aproximadamente, o instante em que o valor das máquinas fica reduzido a metade do valor inicial.

44- O rádio desintegra-se e a quantidade existente numa amostra ao fim de t anos é dada pela fórmula:

$$C(t) = C_0 \times e^{-0,00041t} \quad \text{sendo } C_0 \text{ a quantidade inicial.}$$

Que quantidade de rádio fica de uma amostra de 10 g ao fim de 1500 anos?

Qual é a vida média (em anos) do rádio?

Nota: Vida média de uma substância radioactiva é o tempo gasto para que 50% da amostra de substância se desintegre.

45- Os biólogos afirmam, que, sob condições ideais, o número de bactérias numa cultura cresce segundo a lei:

$$Q(t) = 2000 \times e^{kt}$$

Supõe que existem inicialmente 2000 bactérias em certa cultura e que existem 6000 bactérias 20 minutos depois. Quantas bactérias existirão após 1 hora?

46- Dado que a expansão biológica é limitada pela pressão ambiental nas suas diversas formas, a função que melhor se ajusta ao crescimento real, em largos períodos de tempo, é a função:

$$f(t) = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}$$

em que K, a e b são constantes características da população em estudo e t é a variável tempo.

Alguns analistas são da opinião que a população mundial, desde 1960, se ajusta à função:

$$P(t) = \frac{3600}{1 + 11e^{-0,2123t}}$$

(em milhões de pessoas)

Qual a população em 1960?

Qual será a população em 2000? E em 2010?

Quando duplicará a população existente no ano 2000?

47- Um acidente de carro foi presenciado por 1/10 da população de uma aldeia.

O número de pessoas que soube do acontecimento, t horas após, é dado pela expressão

$$F(t) = \frac{B}{1 + Ce^{-kt}}$$

onde B é a população da aldeia.

Se $\frac{1}{4}$ da população soube do acidente 2 horas depois, quanto tempo passou até que metade da população soubesse do acidente?

48- A população de um país aumenta 4% ao ano.

Ao fim de quantos anos terá o seu valor multiplicado por 10?

Sabendo que uma geração corresponde a 30 anos e que se mantém o ritmo de crescimento anual, daqui a quantas gerações se produzirá aquele fenómeno?

49- De 1990 a 1999 segue-se a evolução de duas populações **F** e **G** de duas espécies animais.

As funções que definem essa evolução são respectivamente:

$$f(t) = 24 \times 1,2^t$$

$$g(t) = 4 \times 1,5^t$$

Sendo $f(t)$ e $g(t)$ expressas em milhares e o tempo contado a partir do final de 1990.

A partir de que momento a população **F** ultrapassa a população **G**?

Mostra que a equação $f(t) = g(t)$ tem por solução $t = \frac{\ln 6}{\ln 1,25}$.

50- Durante quanto tempo devem colocar-se 1 000 000 contos num banco, a uma taxa anual de 6,1%, se se pretende duplicar o capital:

Supondo que os juros são capitalizados anualmente?

Supondo que os juros são capitalizados mensalmente?

51- O Micael depositou 5000 euros à taxa anual de 6%, sendo os juros capitalizados anualmente.

A expressão que dá o capital adquirido ao fim de n anos é $C(n) = 5000 \cdot 1,06^n$ (euros).

Ao fim de quantos anos o Micael terá um saldo superior a 12 000 euros? Quantos escudos terá o Micael ao fim daquele período de tempo?

52- Deduz a expressão que dá o tempo necessário para que uma quantia duplique o seu valor quando depositada à taxa anual r , sendo os juros capitalizados n vezes.

53- Um estudo efectuado pelo instituto Pasteur apresenta para modelo da variação da população de uma cultura de bactérias específicas a função definida por:

$$N(t) = \frac{2100(3t+1)}{t^2 + 5t + 6} \quad \text{Indica o número de bactérias que constituem a cultura inicial.}$$

Ao fim de quanto tempo o número de bactérias se torna superior a 100?

Em torno de que valor é que o crescimento da população irá equilibrar-se?

54- O número de células de certo tipo é dado em função do tempo t (em segundos), pela igualdade

$$N(t) = 2^{kt} N_0 \quad \text{com } k \text{ e } N_0 \text{ números reais positivos.}$$

Calcula $N(t)$ para $t = 0$ e para $t = k$ e deduz qual o significado das constantes N_0 e k .

Supõe que $N_0 = 100$ e $k = 100$. Calcula o instante em que o número de células se torna 10 vezes maior do que no instante inicial. Apresenta o resultado a menos de 0.1 do segundo.

55- A intensidade I , em decibéis, de um som audível pode ser dada por:

$$I = 170 + \log_{10} P, \quad \text{onde } P \text{ é o valor da potência, em certa unidade do som emitido.}$$

Sabe-se que um som com intensidade superior ou igual a 100 decibéis é prejudicial à saúde.

Conclui daí a partir de que potência é que devem ser utilizados meios de protecção auditiva.

Dois sons de potências P e P_1 são emitidos por uma mesma fonte. Sabendo que a intensidade do primeiro é dupla da do segundo, mostra que $P/(P_1)^2 = 10^{17}$.

Justifica que quando a potência cresce em progressão geométrica de razão 10^3 , a intensidade cresce em progressão aritmética de razão 30.

56- Injectou-se no instante $t = 0$ uma substância no sangue de um animal.

No instante t ($t > 0$ e em segundos) a concentração C da substância injectada é dada por

$$C(t) = 8(e^t - e^{-2t}).$$

Calcula, com aproximação às centésimas, os instantes para os quais o valor da concentração é igual a $7/8$.

Calcula a concentração ao fim de 10 horas.

57- A “massa vegetal”, M_v , de uma floresta varia com o tempo t e pode ser dada por:

$$M_v(t) = \sqrt{e^t} \quad (e, \text{número de Neper}).$$

Toma-se para unidade de massa vegetal a que existia no começo de 1900, início da contagem do tempo ($t=0$), e para unidade de tempo o século.

Calcula a massa vegetal existente no início de 1500 e a que é previsível para o começo do ano de 2050.

Em que ano a massa vegetal é dupla da que existia no início de 1900?

58 Para obter o povoamento de coelhos em certa região, libertaram-se nela alguns casais desta espécie. Sabe-se que os coelhos se reproduzem exponencialmente, segundo uma lei do tipo:

$$C(t) = K \cdot a^t$$

Supõe $K = 10$ e $a = 1,2$.

Quantos coelhos foram libertados inicialmente naquela região?

Quando o número de coelhos ultrapassar 1000, pode gerar-se desequilíbrio na cadeia alimentar. Ao fim de quantos meses ocorrerá tal possibilidade?

Supõe agora que não eram conhecidas as constantes K e a , mas apenas os resultados de duas contagens:

Ao fim de um ano, após o início do povoamento, contaram-se 163 coelhos e, decorridos mais 6 meses, contaram-se 787 coelhos.

Calcula, neste caso, os valores de K e de a com aproximação às centésimas.

59- Coloca-se um produto solúvel num recipiente com água. Em cada instante t (em minutos) a quantidade do produto ainda não dissolvida é (em gramas):

$$q(t) = \frac{60}{(e^{0,09t} - 3)} \quad \text{com } t \geq 0$$

Qual a quantidade de produto colocada inicialmente na água?

Ao fim de quanto tempo estão ainda por dissolver 20 gramas de produto?

60- Numa empresa o lucro L , originado pela produção de n peças, é dado em milhares de contos por $L(n) = \log_{10}(100 + n) + K$, com K constante real.

Sabendo que não havendo produção não há lucro, determina K e mostra que $L(n) = \log_{10}(1 + 0.01n)$.

Qual o número mínimo de peças que é necessário produzir para que o lucro seja superior a 1 milhar de contos?

Justifica que, apesar do lucro ir aumentando à medida que o número de peças produzidas aumenta, essa variação vai sendo feita de forma mais lenta.

61- A actividade R , de qualquer substância radioactiva, é dada, numa certa unidade de medida, pela expressão

$R(t) = A \cdot e^{-Bt}$, em que A e B são constante reais positivas e t o tempo em horas, com $t \geq 0$.

Mostra que o tempo necessário para que a actividade R passe do seu valor inicial para metade é $\ln 2/B$.

Sabendo que o valor inicial da actividade de uma certa substância radioactiva é 28 unidades e que $R(1) = 26$, determina os valores de A e B para essa substância.

62- Ao ser lançado um foguetão é impulsionado pela explosão de gases resultantes da queima de combustível numa câmara.

Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por:

$V(t) = -3 \ln(1 - 0.005t) - 0.01t$. A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.

A massa inicial do foguetão é de 150 toneladas, das quais 80% correspondem à massa do combustível.

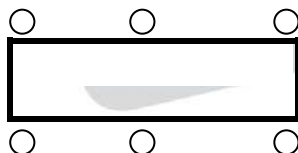
Sabendo que o combustível é consumido à taxa de 0.75 toneladas por segundo, justifica que $t \in [0, 160]$.

63- Para indicar a intensidade de um sismo utiliza-se a escala de Richter. O valo desta escala é obtido a partir da formula $R = 0,67 \cdot \log E - 7,9$ em que E representa a energia libertada, em erg.

Mostra que um terramoto de 8,6 de intensidade, como o de El Salvador em Janeiro deste ano que provocou milhares de vitimas, é cerca de 30 000 vezes mais forte que um terramoto de intensidade 5,6 (apenas 3 unidades na escala coordenada!!).

Por cada aumento de uma unidade na escala qual o aumento de energia?

64- Seis amigos entram numa pastelaria para tomar café e sentam-se ao acaso numa mesa rectangular com três lugares de cada lado, como mostra a figura.



64.1 Determina a probabilidade de dois desse amigos, a Rita e o Chico, ficarem sentados em frente um do outro.

Na pastelaria acima referida a temperatura ambiente é constante.

Admite que a temperatura, em graus centígrados, de um café, t minutos após ter sido colocado na chávena, é dada por:

$$f(t) = 20 + 50 \cdot e^{-0.04t}, t \in [0, +\infty[.$$

64.2 Determina a temperatura do café no instante em que é colocado na chávena.

Com o decorrer do tempo, a temperatura do café tende a igualar a temperatura ambiente. Indica, justificando, a temperatura ambiente.

64.3 Quanto tempo decorre entre o instante em que o café é colocado na chávena e o instante em que a sua temperatura atinge 65°C . Apresenta o resultado em minutos e segundos.

65- Sabe-se que uma determinada substância se desintegra, sendo a massa (em g) ao fim de t horas dada pela formula:

$$m(t) = a \cdot e^{-kt} \quad (t > 0)$$

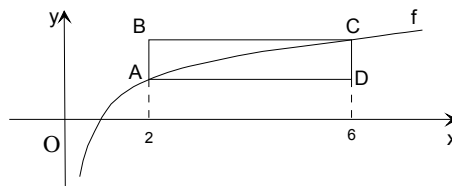
Sabendo que a massa inicial de 2 g corresponde, ao fim de 30 min., 1 g, determina a e k e verifica que

$$m(t) = 2^{-2t+1}.$$

Ao fim de quanto tempo a massa é de 100 mg?

66- Na figura está parte da representação gráfica da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \ln x$ (ln designa logaritmo de base e).

Os pontos A e C, que pertencem ao gráfico da função f , são vértices de um rectângulo [ABCD], de lados paralelos aos eixos do referencial.



As abcissas de A e C são 2 e 6, respectivamente.

Qual é a área do rectângulo [ABCD]?

- (A) $\ln 64$ (B) $\ln 72$ (C) $\ln 81$ (D) $\ln 93$