

1. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são, portanto, subconjuntos de S). Prove que:
 - a) Se $P(A) = 2P(B)$ e $P(A \cup B) = 3P(B)$ então A e B são incompatíveis.
 - b) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
 - c) $P(A) + P(B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 + P(A \cap B)$ (PM-2000)
 - d) Se $B \subset A$ então $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
 - e) Se $B \subset A$ então $P(B) \leq P(A)$

2. Numa Escola há 100 professores sendo 75 mulheres e 25 homens. Entre os professores há 9 homens e 45 mulheres que são fumadores. Os restantes não fumam. Escolhe-se um professor ao acaso. Determine:
 - a) A probabilidade de ser fumador sabendo que é homem.
 - b) A probabilidade de ser mulher sabendo que não fuma.

3. Uma caixa contém quatro bolas vermelhas e seis bolas amarelas, indistinguíveis ao tacto. Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa. Qual é o valor da probabilidade de
 - a) A primeira bola sair vermelha e a segunda bola sair amarela (4/15)
 - b) A segunda bola sair vermelha (3/5)
 - c) A segunda bola sair amarela sabendo que a primeira saiu vermelha (2/3)
 - d) A primeira bola ser vermelha sabendo que a segunda é amarela (4/9)
 - e) A primeira bola ser amarela sabendo que a segunda é vermelha (2/3)

4. Um professor tem duas turmas, a A com 10 rapazes e 15 raparigas e a B com 10 rapazes e 20 raparigas. Este professor encontrou na rua uma das suas alunas mas não se lembra de que turma é. Qual é a probabilidade de ser da B ? (4/7)

5. Um professor tem duas turmas, a A com 10 rapazes e 15 raparigas e a B com 10 rapazes e 20 raparigas. Este professor resolveu escolher, por sorteio, um aluno para desempenhar determinada tarefa. Para isso, lançou uma moeda ao ar para escolher entre a turma A e a B . Seguidamente na turma sorteada foi escolhido, também por sorteio, um aluno. Sabendo que, no final, foi escolhida uma aluna, qual é a probabilidade de ser da B (10/19)

6. Dispomos de duas urnas A e B , cada uma com duas gavetas. A urna A contém uma moeda de ouro numa gaveta e uma moeda de prata na outra gaveta.; a urna B contém uma moeda de ouro em cada gaveta. Uma urna é escolhida ao acaso; a seguir uma das suas gavetas é aberta ao acaso. Verifica-se que a moeda encontrada na gaveta é de ouro. Qual a probabilidade de que a moeda seja proveniente da urna B . (2/3)

7. Uma caixa contém 4 lâmpadas com defeito e 6 sem defeito. Extraem-se duas lâmpadas da caixa. A segunda lâmpada extraída é ensaiada e verifica-se que está em bom estado. Qual é a probabilidade de que a outra também esteja em bom estado? (5/9)

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES - 2
Axiomática - Probabilidade condicionada

- 8 Uma caixa contém cinco bolas brancas e cinco bolas pretas, indistinguíveis ao tacto.
Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.
Considere os seguintes acontecimentos:
 B_1 – a bola retirada em primeiro lugar é branca
 B_2 – a bola retirada em segundo lugar é branca
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B_1 | B_2)$?
(A) $\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}$ (B) $\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$ (PM-2000)
9. Seja A um acontecimento possível, cuja probabilidade é diferente de 1.
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A | A)$?
(A) 0 (B) 1 (C) $P(A)$ (D) $[P(A)]^2$ (Exame-1F-2C-2000)
- 10 Num determinado exame sai apenas um tema escolhido ao acaso entre 20. Apresentaram-se a exame apenas dois alunos, o Tiago e o Rui. O Tiago está em condições de ser aprovado em apenas 16 dos possíveis temas e o Rui em apenas 6 desses temas. Sabendo que só foi aprovado um aluno, qual é a probabilidade que tenha sido o Rui. (3/31)
11. Seja E o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).
Tem-se que:
 $P(A \cap B) = 10\%$, $P(A) = 60\%$ e $P(A \cup B) = 80\%$
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A | B)$?
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (Exame-1F-2C-2001)
12. Um estudo feito a uma certa marca de iogurtes revelou que:
- se um iogurte está dentro do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é 0,005;
 - se um iogurte está fora do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é 0,65;
- Considere que, num certo dia, uma mercearia tem dez iogurtes dessa marca, dos quais dois estão fora de prazo.
Escolhendo, ao acaso, um desses dez iogurtes, qual é a probabilidade de estar estragado? (0,134)
(Exame 2000, 1-2)
- 13 Num dado viciado com as faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de sair 1 é dupla da de sair qualquer uma das restantes faces.
Relativamente a um lançamento deste dado:
- a) Verifique que $P(1) = \frac{2}{7}$ e $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{7}$
- b) Considere os acontecimentos
A: Sair um número múltiplo de 3; B: Sair um número par.
- b1) Determine $P(A | B)$.
- b2) A e B são independentes? Justifique. (não)

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES - 3
Axiomática - Probabilidade condicionada

- 14 Um saco contém três moedas sendo uma cunhada com duas “caras” e as restantes duas são normais e não viciadas. Uma moeda é tirada ao acaso e lançada quatro vezes seguidas. Se sair “cara” nos quatro lançamentos, qual será a probabilidade de que essa seja a moeda com duas “caras”. (8/9)
- 15 Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são, portanto, subconjuntos de S). Prove que:
- $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$
 - $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A) \times P(B|A)$ (Exame-2F2000)
 - Se A e B são incompatíveis então $P(A|B) + P(B|A) = 0$
 - Se A e B são independentes então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \times P(\bar{A})$
 - Se A e B são independentes então $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$
 - Se A e B são independentes então \bar{A} e \bar{B} também são independentes.
- 16 Os acontecimentos E e F são independentes e
- $0 < P(E) < P(F)$
 - $P(E \cap F) = \frac{6}{25}$
 - $P(E|F) + P(F|E) = 1$
- Determine $P(E)$ (2/5)
- 17 Uma escola é frequentada por 1000 alunos do ensino secundário. Sabe-se que 40% dos alunos são do sexo masculino. Dos alunos do sexo masculino 60% frequentam o agrupamento 1, 25% frequentam o agrupamento 2 e 15% frequentam o agrupamento 3. As alunas distribuem-se da seguinte forma: 45% frequentam o agrupamento 1, 35% frequentam o agrupamento 2 e 20% frequentam o agrupamento 3.
- Um aluno da escola foi escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ser do sexo feminino, sabendo que frequenta o agrupamento 1? (9/17)
 - Na escolha aleatória de um aluno da escola os acontecimentos
A: ser do sexo feminino;
B: frequentar o agrupamento 3;
são independentes? Justifique. (não)
- 18 Sabe-se que 5% das lâmpadas produzidas na fábrica *LUX* são defeituosas. Todas as lâmpadas produzidas nesta fábrica são submetidas ao controle de qualidade. Sabe-se ainda que, no controle de qualidade, 1% das lâmpadas defeituosas são aprovadas e 3% das lâmpadas sem defeito são reprovadas.
- Escolhida ao acaso uma lâmpada produzida nessa fábrica, qual é a probabilidade de **ser defeituosa se foi reprovada** pelo controle de qualidade? (0,63%)
 - Admita que, no último ano, a fábrica *LUX* produziu 1 milhão de lâmpadas, tendo enviado para reciclagem todas as lâmpadas reprovadas pelo controle de qualidade. Quantas lâmpadas é provável que esta fábrica tenha enviado para reciclar? (78000)

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES - 4
Axiomática - Probabilidade condicionada

- 19 Um saco contém seis bolas numeradas de 1 a 6
As bolas que têm números pares estão pintadas de verde.
As bolas que têm números ímpares estão pintadas de azul.
Extraem-se aleatoriamente, e de uma só vez, duas bolas do saco.
Sejam A e B os seguintes acontecimentos:
A – As duas bolas tem a mesma cor.
B – O produto dos números das duas bolas é ímpar.
a) Determine $P(A)$ (apresente o resultado na forma de fracção irredutível) (2/5)
b) Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(A | B)$. (1)
- 20 Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos contidos em S, nenhum deles impossível nem certo.
Sabe-se que $A \subset B$.
Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira (P designa probabilidade, e \bar{A} e \bar{B} designam os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente).
(A) $P(A) > P(B)$ (B) $P(A \cap B) = 0$ (C) $P(A \cup B) = 1$ (D) $P(\bar{A}) \geq P(\bar{B})$
- 21 Uma turma do 12º ano é constituída por vinte e cinco alunos (quinze raparigas e dez rapazes. Nessa turma vai ser organizada uma comissão para organizar uma viagem de finalistas. A comissão será formada por três pessoas: um **presidente**, um **tesoureiro** e um responsável pelas **relações públicas**.
a) Se o delegado da turma tivesse obrigatoriamente de fazer parte da comissão, podendo ocupar qualquer um dos três cargos, quantas comissões distintas poderiam ser formadas? (1656)
b) Admita agora que o delegado de turma pode ou não, fazer parte da comissão.
b1) Quantas comissões mistas distintas podem ser formadas? (10350)
b2) Suponha que a escolha dos três elementos vai ser feita por sorteio, da seguinte forma:
Cada aluno escreve o seu nome numa folha de papel. As vinte e cinco folhas são dobradas e introduzidas num saco. Em seguida retiram-se do saco, sucessivamente, três folhas de papel. O primeiro nome a sair corresponde ao do presidente, o segundo, ao do tesoureiro, e o terceiro, ao do responsável pelas relações públicas.
Sejam A, B e C os acontecimentos:
A: “o presidente é uma rapariga”;
B: “o tesoureiro é uma rapariga”;
C: “a comissão é formada só por raparigas”.
Indique o valor da probabilidade condicionada $P(C | (A \cap B))$ e, numa pequena composição, com cerca de dez linhas, justifique a sua resposta. (13/23)
Nota: Não aplique a fórmula da probabilidade condicionada. O valor pedido deverá resultar exclusivamente da interpretação de $P(C | (A \cap B))$, no contexto do problema.

(Prova modelo 2001)